

Recomendaciones para el currículum escolar del eje Datos y Probabilidad

Sociedad Chilena de Estadística

Sección de Educación Estadística

Ana María Araneda

Pontificia Universidad Católica de Chile

Guido del Pino

Pontificia Universidad Católica de Chile

Soledad Estrella

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Gloria Icaza

Universidad de Talca

Ernesto San Martín

Pontificia Universidad Católica de Chile

Prefacio

De la alfabetización verbal a la alfabetización estadística

La educación de toda la sociedad ha sido una preocupación que puede rastrearse en los orígenes mismos de la República de Chile. En 1812, Juan Egaña publicaba en la *Aurora de Chile* un artículo en el que bosquejaba el rol particular y armonizador que tenía la educación con respecto a las tareas y necesidades de desarrollo social, económico y político del país. Pasado los años, la administración de O'Higgins implementó el sistema de Lancaster y en 1822 se funda la Sociedad Lancastésiana, expresando que la felicidad de los pueblos se logra haciéndolos "*ilustrados y laboriosos*".

Hacia la mitad del siglo XIX Domingo Faustino Sarmiento, declarado ciudadano insigne, hizo esfuerzos importantes por lograr avances en educación. Para Sarmiento, la instrucción nacional correspondía "*al grado de educación que tiene o recibe un pueblo culto para prepararse debidamente al desempeño de las múltiples tareas de la vida civilizada*" (*Educación Común*, 1856, p.7). Comandado por el gobierno chileno de la época, recorrió Europa y Estados Unidos recogiendo experiencias educacionales, y no sólo para adaptarlas a la realidad chilena, sino mostrar los efectos de lo que llamaba la educación popular.

Muchos de los argumentos que Sarmiento desarrollaba eran de orden estadístico, algunos muy simples, otros de cierta sofisticación. La misma República de Chile expresó su preocupación por la educación cuando, desde el censo de 1854, se contabilizaban las personas que sabían leer y escribir. Aparecieron estudios en los que se buscaba probar cómo la educación promovía la disminución de los crímenes, o

al menos el que éstos fuesen de menor gravedad. En esto Chile siguió los pasos de la estadística europea (Quetelet, Moreau de Jones), así como de los probabilistas europeos que aplicaron su ciencia a cuestiones sociales (Laplace, Lacroix, Condorcet). Sin duda, las palabras de Andrés Bello, en su discurso inaugural de la Universidad de Chile, están latentes en estos desarrollos: *"La universidad examinará los resultados de la estadística chilena, contribuirá a formarla y leerá en sus guarismos la expresión de nuestros intereses materiales. Porque en éste, como en los otros ramos, el programa de la universidad es enteramente chileno: si toma prestada a la Europa las deducciones de la ciencia, es para aplicarlas a Chile"*.

El estudio de datos cuantitativos fue el instrumento que usó la República a fin de evaluar los diferentes impactos de la alfabetización verbal, junto con el crecimiento de la misma. Pero a partir de la mitad de siglo XX ha aparecido otro campo en el cual los ciudadanos necesitan ser alfabetizados: se trata de la Estadística. Es instructivo recordar que ya en 1955, se organiza un congreso en la Universidad de Chile, en el que se proporcionan argumentos para que la Estadística se enseñe en la universidad. Enrique Cansado, quien lideró ese encuentro, recordaba que la Estadística constituye *"un instrumento de reconocida eficacia en el análisis y resolución de los problemas económicos y prácticos, así como en la formulación y establecimiento de los planes de desarrollo económico de los países"* (Anales de la Universidad de Chile, 1955, p.121). Y como antaño, se echó mano de la experiencia internacional para ofrecer algunos caminos de enseñanza de la Estadística que podían ser transitados con las posibles adaptaciones, por los centros chilenos de enseñanza. En ese congreso se tradujo el trabajo de Samuel S. Wilks, titulado *"La Necesidad de una Temprana Educación Estadística"*.

En 1962, cuando el Instituto Interamericano de Estadística (IASI) entidad subalterna de la OEA, en cumplimiento de una resolución de un Congreso Interamericano de Estadística, decide establecer en un país latinoamericano un gran centro de estudios para la formación de estadísticos, entre las ciudades con más opción para esta sede se encontraban Bogotá, Santiago de Chile y Río de Janeiro. Un comité de la OEA escogió a Santiago de Chile como sede. A este Centro Interamericano de Enseñanza de la Estadística, CIENES, comienzan a llegar académicos del exterior para realizar postgrados en el CIENES en Chile, que es en esos momentos, bajo la dirección del profesor Enrique Casado, la institución de mayor trascendencia en la Enseñanza de la Estadística en el ámbito latinoamericano.

Desde la mitad del siglo XX hasta ahora, la Estadística se usa en muchas áreas de la vida nacional. Así, por ejemplo, padres y apoderados reciben un informe del Ministerio de Educación, en el cual se detalla el logro educacional de la escuela según la medición del SIMCE. En la prensa aparecen discusiones de políticas públicas, donde se esgrimen argumentos de carácter estadístico. Cuando se quiere invertir en los fondos de pensión, se habla de riesgo. Los ejemplos fácilmente pueden multiplicarse.

¿Cuánta estadística debe conocer un ciudadano actualmente?, parece ser la pregunta relevante. Corresponde al Estado procurar una nueva alfabetización, esta vez una alfabetización estadística, y ésta debe iniciarse desde la temprana edad escolar.

Razón de este documento

Este documento surge por la responsabilidad que siente la Sociedad Chilena de Estadística de la difusión de esta disciplina en todos los niveles. Muchos de sus miembros tienen una vasta experiencia en la

educación a nivel escolar y están al día en los avances internacionales en esta materia.

Creemos que las decisiones en materias educacionales son complejas, y en ellas deben contribuir al menos los expertos en la disciplina y en la didáctica de la misma. Por otro lado, como ya se ha hecho tantas veces en Chile, es menester aprovechar la abundante literatura internacional y la experiencia de diversos países en el aprendizaje y la enseñanza de la Estadística.

El presente documento de trabajo ha sido confeccionado de común acuerdo por un grupo de académicos afiliados a la Sección de Educación Estadística de la Sociedad Chilena de Estadística, SOCHE, uno de cuyos propósitos es difundir a nivel nacional las posibilidades que ofrece la Estadística para resolver problemas en el ámbito personal, grupal y nacional.

Hoy en día, un ciudadano medianamente ilustrado debe comprender las informaciones que aparecen en los medios de comunicación y ser capaz de tener una actitud crítica frente a tales informaciones y participar en las decisiones que toma su sociedad. Por esta razón, es un deber ineludible de la educación escolar preparar a los estudiantes en el ámbito estadístico. Ese deber alfabetizador debe estar garantizado por el Estado.

La Estadística ofrece a otras áreas del saber un conjunto coherente de ideas y herramientas para recopilar, analizar e interpretar datos, apoyando la extracción de conclusiones a partir de ellos. Si bien estas actividades tienen una clara naturaleza transdisciplinaria, es habitual que aparezcan en el currículum escolar dentro de la Matemática. En principio no hay inconveniente en que esto sea así, pero es importante incorporar profesores de otras disciplinas, por ejemplo de

ciencias y de historia, que puedan apoyarse en conceptos y métodos estadísticos para la mejor interpretación de sus respectivas exposiciones lo cual se traduce en que los estudiantes tengan una mejor apreciación y familiaridad con la Estadística.

La relación entre la Matemática y la Estadística es ciertamente bidireccional. Lo más obvio es que la matemática permite definir algunos conceptos con más precisión. Por otra parte, en Estadística los números (datos) tienen un escaso interés si no son parte de un contexto. De esta forma, la Estadística asume un rol de conectividad y coherencia al integrar algunos conceptos, operaciones y aplicaciones matemáticas a situaciones reales.

El pensamiento estadístico se desarrolla en etapas, sin que se pueda saltar ninguna. Dada la complejidad de muchos conceptos, es imprescindible iniciar la formación tempranamente, incluso desde el nivel de educación parvularia. Este es el caso, también de la Probabilidad, disciplina relacionada con la Estadística y que se ocupa de modelar las muchísimas situaciones en que existe incertidumbre.

La comunidad internacional en el área de Educación Estadística tiene un amplio consenso en *cómo* enseñar Estadística y sobre *cómo no* enseñarla. Éste se manifiesta en revistas científicas especializadas, actas de congresos y textos de estudio. La existencia de un consenso representa una gran fortaleza, pues hay una guía clara sobre cómo proceder.

El documento no pretende ser novedoso ni normativo, sino que quiere poner a disposición de la comunidad educativa nacional un material de análisis, que está sintetizado a partir de diversas fuentes internacionales. Especial énfasis se otorga a las conclusiones obtenidas por expertos afiliados con la American Statistical

Association, ASA, y perteneciente a la International Association for Statistical Education, IASE. También cabe mencionar revistas especializadas en Educación Estadística, que constituyen una fuente importante y actualizada para el diseño del currículum escolar en Estadística, así como para recomendaciones didácticas y pedagógicas. Entre estas publicaciones se encuentran el *Journal of Statistics Education*, *Statistics Education Research Journal*, *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, y *Technology Innovations in Statistics Education*.

La Sociedad Chilena de Estadística busca hacer una contribución a la difusión de la Estadística y espera que este documento sirva de apoyo a la toma de decisiones sobre el aprendizaje y enseñanza de la Estadística en Chile, pues una fuerza laboral alfabetizada estadísticamente es un capital humano clave para el desarrollo de un país que promueve, a través de la educación, los valores trascendentales de equidad, integración social y democracia.

TABLA DE CONTENIDOS

1. ¿QUÉ ES LA ESTADÍSTICA?

2. ¿POR QUÉ ENSEÑAR ESTADÍSTICA?

- 2.1.- La Estadística y un mundo lleno de datos
- 2.2.- La Estadística y el desarrollo científico
- 2.3.- La Estadística en la Escuela
- 2.4.- La Estadística y la Matemática
- 2.6 Fuentes de variabilidad
- 2.7 El papel del contexto
- 2.8- Probabilidad y Estadística

3. ANTECEDENTES INTERNACIONALES

3. 1. Antecedentes en EEUU

- 3.1.1 El curriculum
- 3.1.2 Los profesores
- 3.1.3 Etapas y características de la resolución de problemas estadísticos.
- 3.1.4 Avance a través de los distintos niveles

3.2. Antecedentes de Nueva Zelanda

3.3. Antecedentes de otros países

4. LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN EL CONTEXTO DE LA ESTADÍSTICA

5. MARCO CURRICULAR PROPUESTO PARA LOS NIVELES

EDUCACIÓN PARVULARIA A SEXTO BÁSICO: EJE DATOS Y AZAR

5.1. Recomendaciones generales

5.2. Algunas situaciones y ejemplos

5.3. Estudios comparativos

5.3.1 Caso general

5.3.2 Estudio experimental

5.4. Descripción del centro: Medidas de tendencia central o de localización

5.4.1 La mediana

5.4.2 La media

5.5. Medidas de dispersión

5.6. Buscando asociaciones

5.6.1 Gráfico de dispersión

5.6.2 Gráfico de tiempo

5.7. Comprensión de la variabilidad

5.8. El papel de la probabilidad

5.9. Usos inadecuados de la Estadística

5.10. Sobre el apoyo de la Estadística a la enseñanza de la Matemática

6. CAPACITACIÓN DE LOS DOCENTES EN LA ENSEÑANZA DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

6.1. Necesidad de la capacitación

6.2. Desafíos a enfrentar

6.3. Ideas básicas sobre capacitación de los profesores

6.4. Estrategias de Capacitación

APÉNDICE A: EL MODELO MARCO DE GAISE

A.1. EL MODELO MARCO

A.2. ALGUNAS ILUSTRACIONES

BIBLIOGRAFÍA

1. ¿QUÉ ES LA ESTADÍSTICA?

Es más sencillo ejemplificar el uso de la Estadística que definirla, y de hecho hay múltiples definiciones, las que enfatizan diferentes aspectos. Mencionamos a continuación algunas de ellas.

"La estadística es una disciplina metodológica. No existe por sí misma, sino más bien ofrece a otras áreas del saber un conjunto coherente de ideas y herramientas para trabajar con datos. La necesidad de esta disciplina se deriva de la omnipresencia de la variabilidad" (Moore y Cobb, 1997).

"La Estadística es la Ciencia de los datos" (Aliaga y Gunderson, 2005).

"La estadística es la aplicación científica de los principios matemáticos de la colección, análisis y presentación de datos numéricos. Los estadísticos contribuyen a la investigación científica mediante la aplicación de sus conocimientos matemáticos y estadísticos en el diseño de encuestas y experimentos, la recolección, procesamiento y análisis de los datos, así como la interpretación de los resultados" (American Statistical Association).

"La Estadística como disciplina es el desarrollo y aplicación de métodos para recopilar, analizar e interpretar los datos. Los métodos estadísticos modernos implican el diseño y el análisis de experimentos y encuestas, la cuantificación de los fenómenos biológicos, sociales y científicos y la aplicación de los principios estadísticos para entender más sobre el mundo que nos rodea. Puesto que los datos se utilizan en la mayoría de las áreas del quehacer humano, la teoría y los métodos de la estadística moderna se han aplicado a una amplia variedad de campos. Algunas de las áreas que utilizan modernos métodos estadísticos en las ciencias médicas, biológicas y sociales, economía, finanzas, mercadotecnia, manufactura y administración, gobierno, institutos de investigación y muchos más. Nuevas áreas se están abriendo, debido a los avances en áreas como la investigación de la encuesta la biotecnología y la informática" (University of Nebraska, Department of Statistics).

"La Estadística es la ciencia de la recolección y análisis de datos para la toma de decisiones" (Ferreiro y Fernández de la Reguera, 1998).

"La Estadística es una disciplina científica cuyo propósito es favorecer o facilitar la realización de inferencias inductivas basadas en datos mediante: i) el resumen de la información contenida en los datos (a efectos de que los usuarios puedan realizar sus inferencias a base de tal resumen), ii) el dimensionamiento o cuantificación o control del error inherente a toda inferencia inductiva" (Araujo (2011 b)).

También se ha caracterizado la Estadística diciendo que "El enfoque sobre la variabilidad natural le da a la Estadística un contenido particular que la diferencia de las matemáticas mismas, y de otras ciencias matemáticas, pero es algo más que el contenido, lo que distingue al pensamiento estadístico del pensamiento matemático. La Estadística requiere una manera diferente de pensar, porque los datos no son números, se trata de *números con un contexto*. En matemáticas, el contexto oscurece la estructura. En el análisis de datos, el contexto le da sentido" (Moore y Cobb, 1997).

En la enseñanza estadística escolar no es factible profundizar demasiado en las inferencias inductivas, pero se debe discutir al menos situaciones comunes como el de la toma de encuestas y los experimentos (como los ensayos clínicos). Aunque hay un amplio acuerdo entre los especialistas en Educación Estadística sobre muchos temas que deben enseñarse, existen algunas discrepancias sobre qué temas adicionales deben tratarse, por ejemplo, la profundidad con que se trate la Probabilidad. Esencialmente se distingue entre la Probabilidad como disciplina científica autónoma de la Probabilidad como herramienta fundamental para la Estadística.

2. ¿POR QUÉ ENSEÑAR ESTADÍSTICA?

Septiembre de 2011

2.1. La Estadística y un mundo lleno de datos. Estamos inmersos, y posiblemente abrumados, por las ingentes cantidades de datos con que nos bombardean los medios de comunicación. La prensa entrega informaciones sobre diversos ámbitos: economía, educación, entretención, deportes, alimentación, medicina, opinión pública y comportamiento social, entre muchos otros aspectos. Si las usamos adecuadamente, estas informaciones pueden ayudarnos en tomar decisiones personales, familiares, laborales y como ciudadanos. Para hacer frente a este tipo de problemas todo ciudadano debiera estar alfabetizado estadísticamente; en palabras de H.G. Wells *"llegará el día en que pensar estadísticamente sea tan necesario como leer y escribir"*.

Una parte importante de nuestra vida se rige por números, por lo que los egresados del sistema escolar deben poder razonar estadísticamente para hacer frente de manera inteligente a las demandas que nos plantea el mundo moderno. Para comprender los datos y transformarlos en información útil hay que ser capaces de formular preguntas interesantes que puedan responderse sobre la base de estos datos, así como preguntarnos sobre cómo fueron obtenidos. La información está en general sujeta a variabilidad e incertidumbre y tomar decisiones en este contexto es un tema estadístico.

Las encuestas de opinión pública son los ejemplos más conocidos de aplicación de la Estadística: es fundamental entender que la confiabilidad de sus resultados depende del mecanismo de selección de la muestra y comprender conceptos como el margen de error del muestreo. La figura 1 ilustra las características de la alfabetización estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2007, citado en Estrella, 2009).

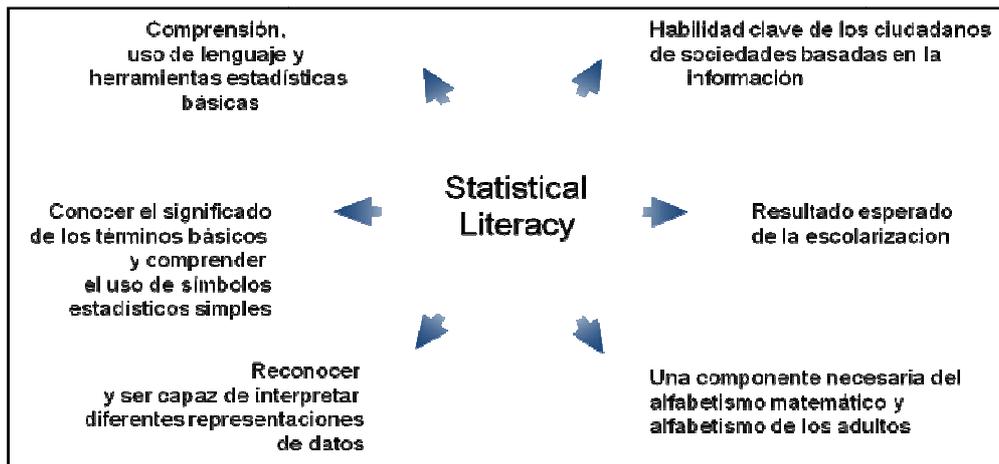


Figura 1: Características de la Alfabetización Estadística.

Una fuerza de trabajo estadísticamente competente permitirá al país competir más eficazmente en la economía mundial de mercado y mejorar su posición en el mercado económico internacional. Por ejemplo, la Estadística proporciona herramientas para obtener las mejoras de calidad y productividad que demanda un mercado competitivo. La inversión en alfabetización estadística es así una inversión en el futuro económico de nuestra nación.

La información estadística es también necesaria para nuestras decisiones cotidianas, en temas tales como la calidad nutricional de los alimentos, seguridad y eficacia de los fármacos, información bursátil y económica, ratings de programas televisivos, rendimiento, seguridad y confiabilidad de los automóviles, etc. La inversión en alfabetización estadística es también una inversión en bienestar individual de los ciudadanos.

2.2. La Estadística y el desarrollo científico. La inferencia inductiva basada en datos es el método científico usado por todas las ciencias aplicadas para buscar el conocimiento. Los avances científicos han producido grandes avances en la esperanza de vida, la detección y tratamiento de enfermedades, y la producción de alimentos, por nombrar algunos ejemplos. La Estadística juega aquí un papel importante, por ejemplo, ella guía las pruebas que infieren o pronostican la efectividad y los efectos secundarios de los medicamentos.

Un punto importante es que el tipo de conclusiones que se pueden sacar válidamente a partir de la Estadística, depende del diseño del mismo y de su implementación. Ser capaz de hacer estas distinciones forma parte de la alfabetización estadística de una persona, la cual puede entonces tener argumentos sobre los supuestos hallazgos de un estudio.

Por otro lado, los avances en las ciencias básicas han sido posibles gracias a un uso inteligente de las inferencias inductivas basadas en experimentos. Las leyes de Newton en la Mecánica y la ley de Boyle en la Física del calor son ejemplos importantes en que los desarrollos teóricos tienen una contraparte experimental. La variabilidad subyacente en su comprobación empírica está acá asociada con errores de medición.

En las ciencias biológicas se usan también experimentos, pero en éstos, la variabilidad es mucho mayor, puesto que combina la variabilidad natural con aquella vinculada a los errores de medición. Algo similar ocurre en las ciencias sociales, aunque aquí se tienen otras limitaciones para realizar experimentos.

2.3. La Estadística en la Escuela. Un egresado de educación secundaria estadísticamente alfabetizado debe ser capaz de entender el alcance de las conclusiones de las investigaciones científicas y tener una opinión informada sobre la legitimidad de los resultados reportados. Tal conocimiento empodera a las personas al darles herramientas para pensar por sí mismas, hacer preguntas inteligentes a los expertos y confrontar las ideas con confianza. Estas habilidades son necesarias para sobrevivir en el mundo moderno.

La alfabetización estadística es un proceso sobre una base continua que tiene como meta el desarrollo del pensamiento estadístico. Uno de los objetivos principales de la Educación Estadística es ayudar a los estudiantes secundarios a desarrollar el pensamiento estadístico propio de un ciudadano y consumidor informado, el cual necesita utilizar razonamientos estadísticos. La figura 2 ilustra las características del pensamiento estadístico (Garfield y Ben-Zvi, 2007, citado en Estrella, 2009).

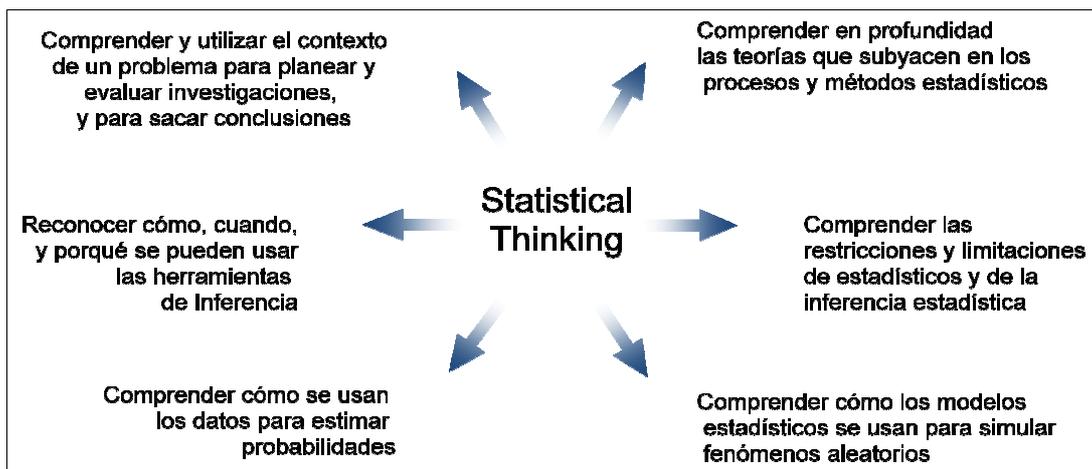


Figura 2: Características del Pensamiento Estadístico.

2.4. La Estadística y la Matemática

La Estadística tiene objetivos propios distintos de la Matemática. En particular, el mundo de las inferencias inductivas es ajeno a esta última y la mayoría de los profesores de Matemática tiene poco entusiasmo por este tipo de inferencias, aunque ellas son imprescindibles en muchas otras áreas del conocimiento.

Si bien la Estadística tiene vínculos con la Matemática, existen diferencias sustanciales de enfoque. En efecto, la Estadística es esencialmente metodológica y ofrece a otras áreas un conjunto coherente de ideas y herramientas para trabajar con datos. La resolución de problemas estadísticos y la toma estadística de decisiones depende de la comprensión, explicación y cuantificación de la variabilidad de los datos y del grado de incertidumbre asociado a las inferencias inductivas que se formulan en base a estos datos. **Es este foco en la variabilidad y la incertidumbre lo que distingue la Estadística de la Matemática.**

Por otra parte, las nociones y herramientas estadísticas básicas pueden emplearse como recursos para la Matemática al proporcionar un contexto a los números, gráficos y operaciones.

2.5. Fuentes de variabilidad

Se pueden distinguir diversas fuentes de variabilidad en los datos, las que generan distintos tipos de incertidumbre. Entre ellas mencionamos:

Variabilidad en la Medición: Las mediciones repetidas en un mismo individuo pueden variar entre sí, debido al instrumento de medición o a los cambios en el sistema que se está midiendo.

Variabilidad natural: Las diferencias entre los objetos (personas, plantas, semillas, piezas producidas por una planta, países, etc.) es inherente a la naturaleza. Es natural que la gente tenga diferentes alturas, aptitudes, habilidades, opiniones o respuestas emocionales.

Variabilidad inducida: La selección *aleatoria* (el término técnico asociado con el *azar*) de una muestra o la asignación aleatoria de ciertos factores en un experimento, son herramientas estadísticas modernas de la mayor importancia. Esto permite distinguir los efectos sistemáticos que estamos buscando de la variabilidad natural. Un diseño inteligente del muestreo o de un estudio experimental es importante para determinar los efectos de diferentes factores.

La variabilidad muestral: En una encuesta política, la proporción de votantes que apoya un candidato se usa para estimar esta proporción sobre todos los votantes. Sin embargo, si se extrae una segunda muestra, la proporción será probablemente distinta. Esto es un ejemplo de lo que se denomina variabilidad muestral.

2.6. El papel del contexto

La Estadística trabaja habitualmente con números, al igual que la Matemática. Sin embargo, la primera examina los números dentro de un contexto, lo que requiere una forma diferente de pensar. La Matemática y la Estadística enfrentan el contexto de diferente forma. En la Matemática, el contexto oscurece la estructura, mientras que en Estadística el contexto es

indispensable. Tanto matemáticos como estadísticos buscan patrones, pero en el segundo caso los patrones dependen del contexto.

2.7. Probabilidad y Estadística

La Probabilidad es una parte importante de la Matemática moderna y tiene múltiples aplicaciones. En particular, ella es una herramienta esencial en la llamada Inferencia Estadística. Sin embargo, el uso de la probabilidad como un modelo matemático y el uso de la probabilidad como una herramienta de la Estadística no solo emplean distintos enfoques, sino que también diferentes tipos de razonamiento. Como parte de la Matemática, la Probabilidad utiliza un *razonamiento deductivo* para simular el comportamiento no determinístico de un fenómeno en estudio. Por su parte, la Inferencia Estadística toma como punto de partida a los datos y utilizando un *razonamiento inductivo* nos dice algo sobre la validez de los supuestos. Por ejemplo, si las frecuencias empíricas difieren mucho de las previstas por el modelo probabilístico, ello sugiere que la probabilidad de que tal modelo sea válido es baja.

En el muestreo y en el diseño experimental ocurren dos aplicaciones importantes de la "asignación aleatoria (aleatorización)" en el trabajo estadístico. En el muestreo "seleccionamos una muestra al azar", mientras que en un experimento (por ejemplo un ensayo clínico) "asignamos al azar las unidades experimentales a diferentes tratamientos". La *aleatorización* genera una incertidumbre controlada en los resultados y mediante este control es posible su vez asignar una confiabilidad a la validez de supuestos en la población de la cual provino la muestra.

Basado en esto, la Estadística permite, por ejemplo, examinar si los resultados observados pueden o no atribuirse a la *casualidad* (el azar), o si hay verdaderamente algo sistemático. En este último caso se dice que las conclusiones alcanzadas por este procedimiento son *estadísticamente significativas*.

3. EDUCACIÓN ESTADÍSTICA ESCOLAR

3. 1. Antecedentes en EEUU

Esta sección está basada sustantivamente en el influyente informe *A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education*, GAISE Report, American Statistical Association, de Franklin et al. (2005). Este informe no representa sólo la opinión de los connotados autores, sino que es un documento respaldado oficialmente por la American Statistical Association.

3.1.1 El currículum

Durante los últimos veinticinco años, la Estadística (usualmente bajo el nombre de *Datos y Azar*) se ha convertido en una componente clave del plan de estudios de Matemática K-12 (desde nivel educación parvularia hasta IV educación media). Los avances en computación y en los métodos de análisis de datos, sumados a la irrupción de la era de la información, llevó al desarrollo de materiales curriculares orientados a la introducción de conceptos estadísticos en el currículo escolar, comenzando en el último nivel de enseñanza parvularia. Esta acción fue apoyada por el Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM) de EEUU, cuando incluyó *Datos y Azar* en su influyente documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989). Este documento, junto a *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) se convirtieron en la base para la reforma curricular de Matemática en EEUU. Desde entonces, el interés por la Estadística como parte de la Educación Matemática ha cobrado mucha fuerza. El NCTM es un grupo que propende la mejora de la Educación Estadística a partir del nivel escolar; y también lo es el *National Assessment of Educational Progress* (NAEP, 2005) que desarrolló alrededor del mismo contenido de los estándares del NCTM, el Análisis de Datos y la Probabilidad, temas que ocupan un espacio creciente papel en el examen NAEP. En 2006, el College Board publicó el *College Board Standards for College Success Mathematics and Statistics*, el cual incluye "Datos y Variación" y "Azar, Equilibrio y Riesgo" entre su lista de ocho áreas temáticas que son "fundamentales para los conocimientos y habilidades desarrolladas en la escuela secundaria". Estos estándares ponen de manifiesto un constante énfasis en "Análisis de Datos, Probabilidad y

Estadística **en cada uno de los niveles de escolaridad**. Cabe hacer notar que la separación entre análisis de datos y Estadística aparece en el original, pero que usualmente se usa el primer término como parte de la Estadística o incluso como un sinónimo. El emergente movimiento de alfabetización cuantitativa pide mayor énfasis en la práctica de este tipo de habilidades, las que ayudarán a asegurar el éxito futuro de los egresados en la vida y en el trabajo, pues muchas de estas habilidades son de carácter estadístico.

La publicación *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy*, (Steen, 2001), afirma que un estudio reciente titulado *Ready or Not: Creating a High School Diploma That Counts* recomienda "competencias imprescindibles" que necesitan los egresados de la escuela para que tengan éxito en la educación superior, o bien en trabajos que requieran habilidades cuantitativas, como es el caso de muchos empleos en la economía actual. Este documento incluye, además del Álgebra y de la Geometría, aspectos de Análisis de Datos y Estadística.

El informe *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE): A Pre-K–12 Curriculum Framework*, respaldado por la American Statistical Association entrega un detallado marco curricular y un marco conceptual para la Educación Estadística, que complementa al *NCTM Principles and Standards for School Mathematics* (2000). Los principios y estándares de la NCTM en Análisis de Datos y Probabilidad buscan capacitar a todos los estudiantes K-12 para:

1. Formular las preguntas que se pueden abordar con datos, así como recolectar, organizar y presentar datos relevantes a fin de responderlas.
2. Seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar los datos.
3. Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones que se basan en los datos.
4. Entender y aplicar conceptos básicos de Probabilidad.

Este estándar incluye también métodos para realizar inferencias y obtener conclusiones a partir de los datos. Él aborda también los conceptos básicos y aplicaciones de la Probabilidad, con un énfasis en las aplicaciones a Estadística.

3.1.2 Los profesores

La Estadística es una disciplina relativamente nueva para muchos profesores, quienes pueden no haber tenido una formación adecuada en este tema dentro de sus estudios universitarios iniciales o de formación continua. Sin embargo, es fundamental que éstos posean un conocimiento sólido de los principios y conceptos que subyacen a las prácticas del Análisis de Datos que ahora son llamados a enseñar. Es probable que los profesores deban aclarar la diferencia entre la Estadística y la Matemática; visualizar el currículo de Estadística a lo largo de los niveles escolares como una unidad integrada; y necesiten comprender con mayor profundidad cómo el plan de estudios proporciona un desarrollo secuencial de experiencias de aprendizaje.

Por esta razón, el marco curricular debe proporcionar una estructura conceptual para la Educación Estadística, que entregue un cuadro coherente, articulado y global del currículum, que les permita a los profesores realizar con completitud su tarea en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.1.3 Etapas y características de la resolución de problemas estadísticos.

La enseñanza de la Estadística debe hacerse a través de la resolución de problemas estadísticos. Esto se puede visualizar como un proceso de investigación que consta de cuatro componentes:

- I **Plantear las preguntas de interés**, asegurándose que se disponga de datos para responderlas.
- II. **Recopilar los datos pertinentes**, diseñando un plan para ello y poniéndolo en práctica.

III. **Analizar los datos**, seleccionando los tipos de representación gráfica y numérica más apropiados para el análisis.

IV. **Interpretar los resultados** del análisis de datos, y discutir cómo se relacionan estas interpretaciones con la pregunta original

Reconocer la presencia de la variabilidad en sus diversas formas es fundamental en la resolución de problemas estadísticos:

- I. El estudiante debe lograr distinguir entre preguntas estadísticas y no estadísticas. Para esto es clave comprender la presencia de la variabilidad y entender respuestas no deterministas, es decir, de carácter aleatorio.
- II. El estudiante debe dominar algunos métodos para obtener datos, a través de estudios usando muestras o experimentos, desempeñando el azar un importante papel. Los diseños de recolección de datos deben reconocer su variabilidad y la incerteza en las conclusiones.
- III. El estudiante debe familiarizarse con diversos métodos numéricos y gráficos para analizar los resultados y comunicarlos a terceros.
- IV. El estudiante debe comprender cómo los diseños estadísticos de muestreo o experimentales ayudan a diferenciar los efectos sistemáticos de aquellos atribuibles a la casualidad (variación debida al azar). Un caso familiar para ellos es el de las encuestas electorales, en las cuales se usan los conceptos estadísticos de margen de error y nivel de confianza. Estos conceptos se basan en la distribución de las estimaciones en repeticiones de un muestreo aleatorio. El estudiante debe comprender también el uso y limitaciones de la distribución Normal (la campana de Gauss). Que los resultados de una encuesta varíen entre una muestra y otra es un hecho fundamental.

3.1.4 Avance a través de los distintos niveles.

Un profesional estadístico entiende el papel de la variabilidad estadística en el proceso de resolución de problemas y en la formulación de las preguntas se anticipa a la recopilación de datos, la naturaleza de los análisis, y las posibles interpretaciones. No es esperable que un estudiante principiante pueda establecer todos estos vínculos, pues se requiere para ello años de experiencia y formación. La Educación Estadística debe ser vista como un proceso de desarrollo progresivo, no pretendiendo formar un estadístico profesional sino un ciudadano alfabetizado estadísticamente.

3.2 Experiencia de Nueva Zelanda

Nueva Zelanda es reconocida como líder mundial en materia de inclusión de Estadística en el currículo escolar, especialmente con respecto a los programas de educación primaria. La Estadística se ha incluido como parte obligatoria del currículo de matemática de la escuela primaria desde 1969 en algunos niveles, y desde 1992 en el currículo de Matemática en todos los niveles escolares K-12.

El más reciente plan de estudios en Nueva Zelanda, denominado "Matemática y Estadística" se publicó en 2006, e incluye tres capítulos: Números y Álgebra, Medida y Geometría, y Estadística. Es importante destacar que en consonancia con las recomendaciones de las investigaciones del área, el eje de Estadística incluye un fuerte énfasis en las investigaciones estadísticas (pensamiento), al requerir a los estudiantes en todos los niveles a participar en la conducción de investigaciones. La referencia explícita al pensamiento estadístico proporciona reconocimiento implícito de la importancia de la investigación contemporánea desde el campo de la Educación Estadística (Burgess, 2007).

El reporte sobre la Enseñanza de la Matemática en el siglo 21 (MT21, 2007, citado por Estrella, 2010) estudia la preparación de los profesores de Matemática de enseñanza básica en seis países. Él pone de relieve los casos de Taiwán y Corea, cuyos estudiantes continuamente tienen un buen desempeño en pruebas comparativas internacionales como TIMSS y PISA.

Un análisis de los currículos en estos países muestra que ellos tienen un currículo coherente, pertinente y riguroso, y los profesores han sido entrenados con amplias oportunidades educacionales en Matemática y en los aspectos prácticos de su enseñanza de la Matemática.

Conforme a los desafíos del mundo actual en que a diario se toman decisiones en medio de la incertidumbre, el gobierno de Chile propuso un ajuste en el currículo (MINEDUC, 2009), en el cual se incorpora el eje Datos y Azar desde primer año de educación básica a cuarto año de enseñanza media, introduciendo la componente de Probabilidades en forma continua en la enseñanza básica. Este cambio curricular coincide con la tendencia de las reformulaciones en los currículos internacionales, en los cuales se introduce el razonamiento probabilístico desde la Educación Básica y la Estadística como un continuo en la escolarización.

3.3 Experiencia de otros países

- **Italia:** La Estocástica (Probabilidad y Estadística) ha sido incluida desde 1979 en el currículo de Matemática de escuelas secundarias, y desde 1985 en el de las escuelas primarias (Ottaviani, 1995).
- **España:** Desde el año 2006 se inserta la Estadística desde el primer ciclo de enseñanza (niños de 6 y 7 años), en el nuevo Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria en España, conocido como MEC (Arteaga, Batanero et al., 2011).
- **Inglaterra:** El plan de estudios de matemática para los niveles 1 a 4, comprende el procesamiento, representación e interpretación de datos con o sin uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TICs) así como la exploración de la incerteza y el desarrollo de una comprensión de la probabilidad (National Curriculum, 1999).
- **Singapur:** Este país incluyen Estadística y Probabilidad como una de sus mayores y nuevas componentes en todos los niveles, con énfasis en la reducción de mecanización y en la matemática

aplicada, y su inclusión comprende desde el primer nivel de primaria hasta secundaria, y a partir del nivel 5 se permite la calculadora (Mathematics Syllabus Primary Curriculum, 2007).

En otros países, como Australia y EE.UU., los programas de Estadística se han incluido normalmente desde principios de los años noventa (Watson, 2006 citado por Burgess, 2007) aunque con un carácter no obligatorio.

4. LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN EL CONTEXTO DE LA ESTADÍSTICA

La probabilidad aparece en los planes de estudio de Matemática en muchos países, tanto a nivel primario como secundario. Esto se justifica por su aplicabilidad en la vida cotidiana, a otras disciplinas, y en la necesaria toma de decisiones bajo incertidumbre. El azar juega un papel muy importante en el ámbito científico, pero también lo encontramos, por ejemplo, en las predicciones meteorológicas, en los deportes y en los juegos de azar.

El ciudadano se enfrenta diariamente a situaciones en que hay incertidumbre y debe tener una actitud crítica frente a las informaciones erróneas que aparecen en los medios de comunicación. Por esta razón, la presencia de la probabilidad en la escuela en la mayoría de los países desarrollados tiene una tendencia creciente a su inclusión desde edades muy tempranas.

El enfoque usado para enseñar la probabilidad en los distintos niveles escolares es muy importante. La aplicación directa de fórmulas tiene escaso valor pedagógico y no le entrega al estudiante las herramientas necesarias para hacer frente a la incertidumbre. La tendencia actual es relacionar la probabilidad con actividades de corte estadístico vinculadas a la realización de experimentos o simulaciones: formulando preguntas, recogiendo y analizando datos con el propósito de sacar conclusiones o hacer predicciones en base a ellos. Cabe mencionar que el pensamiento

probabilístico es distinto del pensamiento matemático, aunque ambos son complementarios (Scheaffer, 2006).

Significados diferentes se asocian también al concepto de probabilidad, lo que depende de las aplicaciones en situaciones reales. Esto resulta relevante en la enseñanza de la probabilidad y representa un gran desafío para su enseñanza. La interpretación frecuentista (ligada a experimentos repetibles indefinidamente), la interpretación clásica (ligada a equiprobabilidad) y la interpretación subjetiva (que indica grados de creencia) son las más importantes.

Tradicionalmente, la enseñanza de la Matemática se basa en un conjunto de conceptos que se aprenden secuencialmente de forma lineal donde se enfatiza un pensamiento deductivo. Por otro lado, los estudiantes y los adultos tienen desde pequeños ideas informales y juicios previos sobre la probabilidad y el azar. El hecho que muchas de estas ideas sean erróneas, lo que es demostrable empíricamente, tiene un alto valor pedagógico pues muestra las limitaciones de argumentos puramente deductivos. Como contraparte, el conocimiento probabilístico, que está asociado con la Estadística, se basa fuertemente en razonamientos inductivos y debe incluir el análisis e interpretación de datos empíricos.

Para mayores detalles sobre el tema de enseñanza de la Probabilidad se refiere al lector a Batanero y Díaz (2011), el cual fue la base para los contenidos de esta sección.

5. MARCO CURRICULAR PROPUESTO PARA LOS NIVELES EDUCACIÓN PARVULARIA A SEXTO BÁSICO: EJE DATOS Y AZAR.

Esta sección resume las recomendaciones del informe *A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education*, GAISE Report (2005), para lo que se denomina el nivel A. Aunque no hay una correspondencia directa con los niveles escolares chilenos, este nivel va de educación parvularia a sexto Básico, puesto que no se requiere el razonamiento proporcional.

5.1. Recomendaciones generales

En este nivel, los estudiantes:

- Formulan preguntas sobre su curso y determinan qué datos pueden ser útiles para responder a estas preguntas.
- Aprenden cómo utilizar herramientas estadísticas básicas para analizar los datos y hacer inferencias informales para responder a las preguntas planteadas.
- Desarrollan ideas básicas de la probabilidad para preparar el terreno para su uso en niveles más avanzados de desarrollo.

La Estadística se debe ver como un proceso investigativo, ya detallado en la sección 3.1.3. Las recomendaciones para el **nivel A** incluyen:

I. Formular la pregunta

- Los profesores ayudan a formular preguntas (preguntas en el contexto de interés para el estudiante).
- Los estudiantes distinguen preguntas con respuestas estadísticas y preguntas donde hay una respuesta fija.

II. Recopilar datos (para responder la pregunta)

- Los estudiantes realizan un censo en el aula.
- Los estudiantes entienden la variabilidad natural entre un individuo y otro.

- Los estudiantes realizan experimentos sencillos con asignación no aleatoria de los tratamientos.
- Los estudiantes entienden la variabilidad inducida atribuible a una condición experimental.

III. Analizar los datos

- Los estudiantes comparan un individuo con otro.
- Los estudiantes comparan individuo con un grupo.
- Los estudiantes toman conciencia de la comparación entre un grupo y otro.
- Los estudiantes entienden la idea de una distribución.
- Los estudiantes describen la distribución.
- Los estudiantes observan asociación entre dos variables.
- Los estudiantes usan herramientas tanto para explorar las distribuciones como de asociación, incluyendo:
 - Gráfico de barras
 - Gráfico de puntos.
 - Gráfico de tallo y hojas
 - Diagrama de dispersión
 - Tablas de frecuencias
 - Media, mediana, moda y rango
 - Categoría modal.

IV. Interpretar los resultados

- Los estudiantes infieren sobre su curso.
- Los estudiantes reconocen que los resultados pueden ser diferentes en otro curso o grupo.
- Los estudiantes reconocen las limitaciones inherentes a la realización de inferencias sólo en su curso.

Distinguen:

- A. Una variable categórica: por ejemplo el tipo de música, moda o categoría modal (música favorita). Recuentos usando rayitas.

- B. Una variable numérica: estatura, distancia entre los extremos de los dos brazos extendidos, distancia en el salto largo, pulso, entre otras.

5.2. Algunas situaciones y ejemplos

Aunque es recomendable que los estudiantes obtengan los datos por ellos mismos, no es necesario que esto sea así en todos los casos. Los profesores deben aprovechar situaciones que ocurren de manera natural en la clase, donde es posible que los estudiantes se den cuenta de patrones en los datos y comiencen a plantear preguntas. Por ejemplo, los estudiantes pueden formular preguntas que puedan contestarse con los propios datos de asistencia del día.

Ejemplo Música Favorita: **Se realiza un censo en el curso** usando una encuesta. ¿Se pueden inferir sobre lo que ocurre en otros cursos del mismo nivel? ¿en la escuela?

Los estudiantes:

- Reconocen variabilidad entre individuos.
- Pueden usar primero marcas o rayas para anotar las mediciones de los datos categóricos y luego obtener una tabla de frecuencias.
- Pueden usar pictogramas para representar las rayas, lo que se presta para actividades concretas, tales como recortar figuras.
- Pueden hacer un gráfico de barras para representar la tabla de frecuencias.
- Reconocen la *moda* como una manera de describir a un "representante" o "valor típico" de los valores de una distribución, para una variable categórica.

Es importante que los estudiantes desarrollen habilidades y actitudes como: leer e interpretar en un nivel simple lo que los datos muestran acerca de su propio curso, o sean capaces de preguntarse: *¿Qué podría haber causado tener datos con este aspecto?*; pensar cómo ampliar sus hallazgos a un grupo más grande (como el de todos los cursos del mismo grado, toda la escuela, etc.); imaginar qué variables pueden afectar el comportamiento

de los datos en un conjunto más amplio (como la edad o la ubicación geográfica); y sean capaces de reconocer las limitaciones del alcance de la inferencia a otro curso específico.

5.3. Estudios comparativos.

5.3.1 Caso general.

Se comparan dos grupos distintos con respecto a una variable determinada (numérica o categórica). El caso de una variable con dos categorías es particularmente sencillo. Por ejemplo, estar a favor o en contra de algo; ser hombre o mujer; ser menor de edad o no, etc.

Variable categórica: Tablas de frecuencia, gráficos de barra dibujados uno al lado del otro .

Característica numérica: Gráficos de puntos dibujados en líneas paralelas, gráficos de tallo y hojas dibujados "espalda con espalda", o sea, como imágenes en un espejo.

Los gráficos dan ideas sobre la forma de la distribución, su simetría o asimetría, grado de dispersión, montículos, brechas, etc. Los estudiantes deben desarrollar la habilidad de comprensión gráfica, y darle sentido al hecho que una distribución tome una forma particular en el contexto de la variable que se considera, de modo de poder comparar distribuciones pertenecientes a dos grupos.

5.3.2 Estudio experimental

En un experimento se comparan los resultados numéricos para dos condiciones experimentales.

Ejemplo: Los niños plantan porotos secos, dejan que germinen, miden luego la altura de las plantas en un día dado y detectan si hay diferencias de crecimiento, si el ambiente es oscuro o luminoso. La

condición es el tipo de iluminación, variable categórica, y la variable altura es la variable numérica.

5.4. Descripción del centro: Medidas de tendencia central o de localización.

5.4.1 La mediana.

Esta medida describe el centro de un conjunto de datos numéricos en términos de cuántos datos están por encima y cuántos por debajo de ella. Aproximadamente la mitad se encuentra a la izquierda y la mitad se encuentra a la derecha de la mediana. Es preferible usar un número impar de datos, hasta que los estudiantes hayan dominado la idea de un punto medio (que es el promedio de dos valores numéricos), y posteriormente utilizar un número par de datos. Aunque se podría introducir aquí la noción de percentil, GAISE no lo recomienda.

Ejemplo: Los niños pueden anotar cuántas letras hay en sus nombres de pila y calcular la mediana.

5.4.2 La media

El concepto de promedio es familiar para los estudiantes, pero está más bien asociado a operaciones mecánicas. La palabra "media" es en esencia un sinónimo del promedio, que se usa en Estadística. El informe GAISE propone complementar la definición mecánica con la idea de reparto equitativo de los valores. Cuando se introduce más adelante la idea de dispersión, ello ayuda a contextualizar la media.

Ejemplos:

- 1) Largo de nombre: Se puede repartir a cada niño un cubo por cada letra de su nombre. Los niños deben juntar luego todos los cubos recibidos e intentar repartirlos de manera igualitaria entre ellos mismos.

- 2) Largo de 8 lápices: se determina longitud total (por ejemplo colocando los ocho lápices en el carril de la tiza del pizarrón) se mide la longitud total con una cinta y se dobla la cinta tres veces por cada mitad para encontrar los octavos.

Ambos ejemplos entregan una representación concreta al algoritmo de cálculo de la media, aunque no a las ventajas y limitaciones de esta medida resumen. .

Los estudiantes deben poder calcular la media en forma manual para casos sencillos, comprobando los resultados con la tecnología adecuada; se sugiere usar tecnología sólo para grandes volúmenes de datos.

5.5. Medidas de dispersión.

En este nivel la única *medida de dispersión* usada es el *rango*, definido como la diferencia entre los valores máximo y mínimo, y que resulta ser una medida intuitiva. Las medidas de dispersión, al igual que la media y la mediana, sólo tienen sentido con datos numéricos.

Ejemplo: Diferencia entre las edades máxima y mínima..

5.6 Buscando asociaciones

5.6.1 Gráfico de Dispersión

Se ha detallado como estudiar la asociación entre una variable con dos categorías y una variable numérica, mediante la comparación de los gráficos de la variable numérica para cada uno de los grupos definidos por la variable categórica. También se pueden comparar las medidas de tendencia central y de dispersión de los dos grupos

En el caso de dos medidas numéricas tomadas en un mismo individuo (por ejemplo, estatura vs. largo entre brazos se puede analizar mediante un gráfico cartesiano de puntos el cual se denomina *diagrama de dispersión* o

dispersiograma. Con el uso de un diagrama de dispersión, los estudiantes pueden *buscar visualmente tendencias y patrones* en los datos.

Dos preguntas naturales son:

1. *¿Existe una asociación entre la altura y extensión de los brazos?*
2. *¿Se puede **predecir la** extensión de los brazos usando la altura?*
3. *¿Qué tan fuerte es la asociación entre la altura y extensión de los brazos?*

Los estudiantes pueden medir ambas variables entre sus compañeros y construir el diagrama de dispersión. En el ejemplo anterior los estudiantes debieran identificar una relación consistente entre las dos variables: *a medida que aumenta una, también lo hace la otra*. Además notar que hay valores que se alejan de la tendencia.

5.6.2 Gráfico de tiempo

Los estudiantes pueden utilizar también un diagrama de dispersión para analizar gráficamente como los valores de una variable numérica cambian con el tiempo, lo que se denomina *gráfico de tiempo*. Normalmente, a cada valor del tiempo le corresponde un único valor de la otra variable numérica. Una característica especial es que los puntos consecutivos se unen por segmentos rectos, y es un ejemplo para pasar de una variable discreta a una variable continua, para descubrir posibles tendencias a través del tiempo.

5.7. Comprensión de la variabilidad

Los estudiantes debieran explorar las posibles razones por las que los datos lucen de cierta manera, y diferenciar entre variación natural y error.

Ejemplo: bolsitas de caramelos de colores. Los niños pueden especular acerca de por qué ciertos colores aparecen con más o menos

frecuencia. Los niños también pudieron identificar posibles lugares donde podría haberse producido errores en el recuento de los datos

Las nociones de error y variabilidad debieran utilizarse para explicar los valores extremos, los grupos, las brechas que los estudiantes observan en las representaciones gráficas de los datos. Una comprensión del error vs. variabilidad natural ayuda a los estudiantes a interpretar si un valor extremo es un dato legítimo o es inusual o corresponde a un error de transcripción.

Es imperativo que los estudiantes comiencen a entender el concepto de variabilidad en este nivel, pues ella se desarrolla gradualmente en los niveles posteriores. Es importante mantener siempre en mente que la comprensión de la variabilidad es la esencia del desarrollo de sentido de los datos.

5.8. El papel de la probabilidad

Los estudiantes necesitan desarrollar las ideas básicas de probabilidad con el fin de apoyar su uso en la elaboración de inferencias estadísticas en los niveles posteriores. En este nivel los estudiantes deben:

- Entender que la probabilidad es una medida de la posibilidad de que algo vaya a suceder. Es una medida de certeza o incerteza (incertidumbre).
- Entender que las probabilidades se asignan a los sucesos en un continuo que va de 0 a 1.
- Aprender a asignar de manera informal números a la probabilidad de que algo va a ocurrir.
- Tener experiencias sobre la estimación de probabilidades a partir de datos empíricos para diferenciar los resultados experimentales de los teóricos.
- A través de la experimentación o simulación, desarrollar un entendimiento explícito de la noción de que cuantas más veces se

repite un fenómeno aleatorio, más cerca estarán los resultados al modelo matemático esperado.

En este nivel se consideran sólo modelos matemáticos simples basados en resultados equiprobables.

Ejemplo: Consideremos el caso en que un niño lanza 10 veces una moneda equilibrada (es decir, la probabilidad de cara es la misma que la de sello, 0,5):

- Lo más probable es que él o ella no obtengan exactamente 5 caras.
- En un nivel posterior se demuestra que 5 es el denominado "número esperado de caras".
- Si el niño lanza cientos de monedas, él verá que las frecuencias relativas comienzan a *estabilizarse* en la probabilidad esperada de 0,5 para cara, lo que es un caso especial de la denominada *Ley de los Grandes Números*.

Otra observación relativa al lanzamiento de monedas es que el hecho de obtener cara en un lanzamiento no significa que en el próximo lanzamiento lo más probable es que sea sello.

En este nivel los experimentos probabilísticos deben centrarse en la obtención de datos empíricos para desarrollar la interpretación de frecuencia relativa. En todo caso hay que advertir que la noción de frecuencia relativa debe esperar hasta que el alumno pueda usar el razonamiento proporcional, pasando de frecuencias a proporciones o porcentajes.

5.9. Usos inadecuados de la Estadística

El estudiante debe aprender que el uso adecuado de la terminología estadística es tan importante como el correcto uso de las herramientas estadísticas. En particular, el uso adecuado de la media y la mediana debe enfatizarse. Estas medidas resúmenes sólo son apropiadas para describir variables numéricas. Por ejemplo, en el ejemplo de la música favorita, el *número de niños* de la muestra que prefieren cada tipo de música define la

frecuencia, pero no es una variable numérica. Las frecuencias son el resumen numérico de la variable categórica.

Otro error común para un estudiante de Nivel A es el uso inadecuado de un gráfico de barras con datos numéricos. Un gráfico de barras se utiliza para resumir datos categóricos. En niveles más avanzados se suele usar el denominado histograma, pero en este nivel las representaciones gráficas más adecuadas de los datos numéricos son el gráfico de puntos y el gráfico de tallo y hojas.

5.10. Sobre el apoyo de la Estadística a la enseñanza de la Matemática

Es importante reconocer que al estar enfocada la Estadística en la comprensión de los datos y en ponerlos en contexto, ello ayuda a que los estudiantes desarrollen este tipo de habilidades en otras ramas de la Matemática. Por ejemplo, los gráficos de puntos dan un sentido especial a la recta numérica; otros gráficos se conectan con la geometría. Por otra parte, dar sentido a los números debe ser una parte integral del plan de estudios de la Matemática, a partir de la Educación Parvularia.

6. CAPACITACIÓN DE LOS DOCENTES EN LA ENSEÑANZA DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

6.1 Necesidad de la capacitación

Una componente fundamental para lograr los objetivos planteados en los alumnos de educación escolar, en lo referente a los temas de Estadística y Probabilidad, es contar con docentes capacitados en su labor formadora en estas áreas. Un currículum escolar con las características que se ha planteado presenta nuevas exigencias a los profesores que tienen a su cargo la implementación de esta componente del programa de estudios. Si la enseñanza de la Estadística está a cargo de los profesores de Matemática y dada la formación tradicional de éstos, es importante asegurarse de que los profesores entiendan el propósito que persigue la Estadística para que sus clases no se transformen en la aplicación de algoritmos aritméticos o algebraicos.

Como un problema globalizado, no sólo en Chile sino en muchos países, la educación universitaria de quienes serán los futuros profesores no está especialmente diseñada para los desafíos en la enseñanza de Estadística y Probabilidad. En particular, su formación suele ser teórica, sin un cabal entendimiento de lo que significa el azar y la incertidumbre, conceptos en la esencia de los contenidos. Por otra parte, son pocos los profesores de enseñanza básica con mención en matemática quienes en su formación continua, se han enfrentado al desafío de adquirir los conocimientos y habilidades para responder a las exigencias de la enseñanza de la Estadística y Probabilidad. Los profesores de matemática de educación media han tenido estudios teóricos sobre probabilidad pero no sobre su enseñanza.

Respecto a la calidad de la educación chilena, el informe de la OECD (2010) aconseja a nuestro país dirigir sus esfuerzos a mejorar la formación de los profesores en todos los niveles de educación, incluyendo la calidad de los programas de educación inicial, la calidad de sus formadores y sus programas pedagógicos. Además, "De manera general, el gobierno... debería identificar las buenas prácticas y otorgar a las escuelas la ayuda

necesaria para difundirlas por todo el sistema escolar” (pág. 9). Existen ejemplos internacionales sobre programas especialmente diseñados para capacitar a los docentes en estas áreas (Kvatinsky, 2002; Batanero et al. 2004; y Garfield y Everson, 2009).

6.2 Desafíos a enfrentar

Para plantear una línea de capacitación de profesores en las áreas de Estadística y Probabilidad, es fundamental identificar las dificultades y deficiencias que se debe sobreponer.

Como primera componente se encuentra la falta de conocimientos sólidos de los profesores en el área. Usualmente, éstos cuentan con una formación que enfatiza procedimientos más que interpretaciones y conclusiones. Según cita Batanero (2011), en una investigación realizada por Borim y Coutinho (2008), los profesores mostraron, por ejemplo, no entender los conceptos de dispersión, limitándose a comparar grupos en términos de medidas de tendencia central, entre otras dificultades. Una segunda componente, como muestran algunas investigaciones internacionales sobre el desempeño de los profesores en el aula, corresponde a las limitaciones presentadas por éstos para transmitir adecuadamente los conceptos. Esto implica una dificultad para explicar en términos simples una idea abstracta, como también para anticiparse a los errores que cometerán sus alumnos.

Existen estudios que han detectado que los profesores de matemática enseñan los contenidos de Estadística y Probabilidad como técnicas de cálculo, lo que además de mostrar un conocimiento de la Estadística, muestra la carencia de conocimientos en la didáctica específica. Si bien, uno de los factores clave para otorgar educación matemática de calidad es el conocimiento profundo y sustancial del contenido por parte del profesor, (Ma, 2010; MT21, 2007), otra componente esencial corresponde a la manera en que estos conocimientos son transmitidos al alumno, en particular, incluyendo un mayor número de actividades de interpretación que en otras áreas de la matemática.

6.3 Capacitación de los profesores

Las deficiencias encontradas en las habilidades de los profesores para la correcta enseñanza de la Estadística implican que su formación debe concentrarse tanto en las áreas del conocimiento como de la didáctica de la disciplina. Como indica Ortiz (2006), "Por un lado, hemos de preparar [a los profesores] adecuadamente tanto en el conocimiento específico de Estadística y Probabilidad como en el conocimiento pedagógico del mismo, ya que como hemos observado en nuestra investigación, los resultados obtenidos y las estrategias utilizadas por los futuros profesores de Educación Primaria en varios problemas son muy similares a los niños de la investigación de Cañizares (1997), siendo por tanto alarmante que los futuros profesores cometan los mismos errores que los alumnos a los que han de formar". Ortiz sugiere presentar a los futuros profesores "una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del significado global de la probabilidad" y "prepararlos en las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino y Roa, 2004), mostrándoles situaciones de uso en el aula, metodología didáctica y los aspectos cognitivos". Ortiz sugiere un cambio metodológico en la educación de los profesores que "incida en el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales y utilización de la simulación, que, además de mejorar la comprensión, proporcionan modelos de la forma en que han de trabajar en clase con sus alumnos (Godino et al., 2008)".

En la educación de los profesores de Matemática se debe tener presente que su nuevo rol es exigente en tareas como: la capacidad de dar y evaluar explicaciones, modelar operaciones y conceptos, crear un ambiente para el razonamiento estadístico, escuchar e interpretar las ideas estadísticas de los estudiantes, analizar los errores de los alumnos y evaluar las demandas y las soluciones (a veces rápidamente), evaluar y modificar las transposiciones didácticas de los libros de texto, juzgar y elegir representaciones adecuadas, usar notación matemática y estadística, seleccionar y desarrollar definiciones útiles, entre otras.

De acuerdo a Batanero (2011), la educación de los profesores debe capacitarlos para reflexionar sobre el significado de los conceptos a

enseñar, ayudados por un punto de vista histórico, filosófico, cultural y epistemológico de este conocimiento y sus relaciones con otros dominios de la ciencia. Los profesores deben adaptar estos conocimientos a diferentes niveles de enseñanza y diversos niveles de comprensión de los estudiantes. También de acuerdo a Batanero, los profesores deben ser capaces de analizar libros de texto y documentos curriculares con capacidad crítica. Así mismo, deben ser capaces de predecir las dificultades de aprendizaje de los alumnos, los errores, obstáculos y estrategias en la resolución de problemas y desarrollar y analizar las pruebas e instrumentos de evaluación.

Por último, Batanero enfatiza la necesidad de experimentar con buenos ejemplos de situaciones de enseñanza, herramientas y materiales didácticos.

Adicionalmente, de acuerdo a Estrella (2010), un profesor debe ser capacitado para generar y permitir espacios de trabajo en el cual los estudiantes sean quienes obtengan conclusiones y evalúen nuevas conjeturas e investigaciones; además de crear espacios interdisciplinarios, tanto en la interacción con otros colegas, como en la investigación. A través de la experimentación y la simulación, el profesor debe promover la formulación de hipótesis; comprobar conjeturas y modificar sus supuestos o elecciones a la luz de nueva información.

Para esto, el profesor debe ser capaz de desafiar a ocupar las diferentes formas de representar datos para comunicar y generar comprensión. Su finalidad es desarrollar la transnumeración¹, la lectura con comprensión de diversos registros, estimulando un espíritu crítico y evaluativo. El profesor también debe conocer y reconocer los errores y dificultades de los alumnos en la comprensión gráfica, tabular o en el cálculo e interpretación de algunas medidas estadísticas. Del mismo modo, Estrella sostiene que el profesor debe

- Fomentar la exploración de muchos aspectos de la Probabilidad, potenciar la recolección y análisis de datos para la solución de

¹ En el proceso cognitivo de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999; Burguess, 2007), los estudiantes transitan por las distintas representaciones estadísticas y obtienen mayor comprensión de los datos (v.g., de los datos a representaciones tabulares, de gráficos a tablas y viceversa).

problemas, y explorar situaciones en forma activa, experimentando y simulando modelos de probabilidad.

- También en el contexto de la Probabilidad, el profesor debe conocer y reconocer los sesgos y paradojas respecto al azar, y utilizarlos para mejorar la capacidad de juicio de afirmaciones Estadísticas.
- Saber y adaptar conocimientos de la historia de la estadística y la probabilidad para destacar el cambio a lo no determinístico, esencia de esta disciplina.

6.4 Estrategias de Capacitación

Lo anterior muestra la necesidad de crear canales de formación para los futuros profesores, así como de capacitación y formación continua para los actuales profesores en ejercicio.

Futuros profesores

Sería de interés que las instituciones formadoras de profesores, con el apoyo de actores de la comunidad Estadística y de Probabilidad, pudieran ofrecer cursos o programas que provean al menos una alfabetización estadística a los profesores en formación inicial. Estos debieran seguir los lineamientos descritos en el presente documento para obtener los objetivos deseados. Una ventaja es que tal curso podría ofrecerse sin cambios a estudiantes de otras disciplinas, lo que representa un ahorro importante de esfuerzos.

Profesores en ejercicio

La situación es análoga a la anterior, excepto que claramente sería necesario diseñar un curso especial. Idealmente tal curso debiera tener una componente a distancia.

Un problema complejo es que el número de personas preparadas para entregar este tipo de formación es limitado, en relación al gran número de profesores por formar o capacitar. Para paliar esta situación sugerimos que un proyecto que tenga por objetivo la capacitación de profesores en Probabilidad y Estadística tenga los siguientes objetivos específicos:

1. Producir módulos didácticos que sean de calidad tanto en la forma de presentar los contenidos como en las estrategias para lograr el aprendizaje de los estudiantes.
2. Generar estructuras para facilitar que se alcance el objetivo 1. La Sección de Educación Estadística de la Sociedad Chilena de Estadística podría tener un rol de facilitador y de difusor de los materiales estadísticos y didácticos, o de las experiencias de distintos grupos de profesores.
3. Elaborar cursos a distancia, lo que implica una serie de dificultades. En todo caso, tal curso debiera tener necesariamente clases presenciales.
4. Capacitar a algunas personas (por ejemplo, estadísticos, profesores universitarios, profesores secundarios o profesores de enseñanza básica o profesores de la red de maestros), para que dirijan a su vez otros esfuerzos de capacitación en la misma línea. Por ejemplo, se puede ofrecer a estadísticos profesionales o personas con un Magister en Estadística una formación complementaria centrada en lo pedagógico y en la didáctica específica para que puedan desempeñarse como formadores de profesores.
5. Desarrollar talleres de trabajo con profesores con el fin de estudiar y reflexionar más específicamente los aspectos didácticos de la disciplina Estadística.

De conseguirse estos objetivos específicos, se contará con material y personas que faciliten la educación de los profesores en temas estadísticos que normalmente están ausentes en su formación profesional. Para alcanzar estos objetivos y mantenerlos en el tiempo es necesario buscar alternativas de financiamiento. Dada la importancia que ellos tienen para el país y las investigaciones en Educación Estadística encontradas en la literatura internacional, el país debiera financiar proyectos de este tipo.

APÉNDICE A

EL MODELO MARCO DE GAISE

A.1 EL MODELO MARCO

El Modelo marco del GAISE (en lo sucesivo el Marco), utiliza tres niveles de desarrollo A, B y C de alfabetización estadística, los que no están directamente relacionados con la edad, pero que deben ser enseñados de manera secuencial. En el nivel más bajo es el profesor el que dirige la discusión, mientras que en los niveles más alto los alumnos toman un papel más proactivo.

El Marco considera dos dimensiones. La primera dimensión está definida por las componentes del *proceso de resolución de problemas*:

- I Formular preguntas
- II Recopilar datos
- III. Analizar los datos
- IV. Interpretar los resultados

así como por

- V La naturaleza y foco de la variabilidad

y la segunda por los *tres niveles de desarrollo*. A continuación se describe el Marco.

NIVEL A

I. Formular preguntas: Los estudiantes se familiarizan con los rasgos distintivos de las preguntas estadísticas. Los profesores ayudan a formular preguntas en contextos de interés para el estudiante. Las preguntas se restringen al aula.

- II. Recopilar datos (para responder a la pregunta):* No se enseña aún como realizar estudios comparativos. Los estudiantes conducen un censo de su clase y experimentos sencillos.
- III. Analizar los datos:* Utilizar las propiedades particulares de las distribuciones en el contexto de un ejemplo específico. Los estudiantes comparar entre individuos. Los estudiantes comparan la variabilidad dentro de un grupo. Comparan entre un individuo y un grupo. Se familiarizan preliminarmente con las diferencias entre dos grupos. Los estudiantes observan la asociación entre dos variables. Observan la asociación a través de gráficos.
- IV. Interpretar los resultados:* Los estudiantes realizan inferencias a su curso. No extrapolan más allá de los datos. Los estudiantes reconocen las diferencias entre dos personas con diferentes condiciones, o que los resultados pueden ser diferentes en otra aula o grupo.
- V. Naturaleza y foco de la variabilidad:* Medidas de variabilidad. Variabilidad natural. Variabilidad Inducida. El foco de la variabilidad es dentro de un grupo.

NIVEL B

- I. Formular preguntas:* Los estudiantes tienen una mayor familiaridad con la distinción de preguntas estadísticas. Los estudiantes comienzan a plantear sus propias preguntas de interés. Las preguntas no se limitan al aula.
- II. Recopilar datos (para responder a la pregunta):* Los estudiantes comienzan a familiarizarse con el diseño para evaluar diferencias. Las encuestas por muestreo, comienzan a utilizar selección al azar. Los experimentos comparativos comienzan a utilizar la asignación de tratamientos al azar.

III. Analizar los datos: Aprenden a utilizar propiedades de las distribuciones como herramientas de análisis. Cuantifican la variabilidad dentro de un grupo. Comparan grupo a grupo de manera gráfica. Reconocen el error muestral. Tienen cierta cuantificación de la asociación y modelos simples para la asociación.

IV. Interpretar los resultados: Los estudiantes reconocen que es factible mirar más allá de los datos. Reconocen que una muestra puede o no puede ser representativa de la población. Notan las diferencias entre dos grupos con diferentes condiciones. Toman conciencia de la distinción entre estudios observacionales y experimentales. Notan las diferencias en la fuerza de la asociación. Realizan interpretaciones básicas de los modelos de asociación. Los estudiantes distinguen entre asociación y causalidad.

V Naturaleza y foco de la variabilidad: Variabilidad muestral. El foco de la variabilidad es intragrupo e intergrupo, así como en la covariabilidad.

NIVEL C

I Formular preguntas: Los estudiantes pueden realizar la distinción entre preguntas estadísticas y las que no lo son. Los estudiantes plantean sus propias preguntas de interés. Las preguntas se refieren a la búsqueda de generalizaciones.

II. Recopilar datos (para responder a la pregunta): Los estudiantes hacen diseños para evaluar diferencias. Diseños de muestreo con selección aleatoria. Diseños experimentales con aleatorización.

III. Analizar los datos: Comprenden y utilizan las distribuciones en el análisis como un concepto global. Medida de la variabilidad dentro de un grupo, medida de la variabilidad entre grupos. Comparan un grupo con otro usando representaciones gráficas. Describen y cuantifican el error de muestreo. Cuantifican la asociación y ajustan modelos de asociación.

IV. Interpretar los resultados: Los estudiantes son capaces de mirar más allá de los datos en algunos contextos. Generalizan de la muestra a la población. Toman conciencia del efecto de la aleatorización en los resultados de los experimentos. Entienden la diferencia entre estudios observacionales y experimentales. Interpretan las medidas de fuerza de la asociación. Interpretan los modelos de asociación. Distinguen entre las conclusiones obtenidas a partir de estudios de asociación y de estudios experimentales.

V. Naturaleza y foco de la variabilidad: Variabilidad al azar. El foco de la variabilidad está en la variabilidad asociada con el ajuste de modelos estadísticos.

A.2 ALGUNAS ILUSTRACIONES

Los cuatro pasos del proceso de resolución de problemas se utilizan en los tres niveles, pero la profundidad de la comprensión y la sofisticación de los métodos utilizados aumentan a lo largo de los niveles A, B y C. Este avance progresivo en la comprensión del proceso de resolver problemas y de los conceptos subyacentes se acompaña por una creciente complejidad en el papel de la variabilidad. Las ilustraciones de las actividades de aprendizaje dadas aquí tienen por objeto aclarar las diferencias entre los grados de desarrollo de cada componente del proceso de resolución de problemas.

I. FORMULAR LAS PREGUNTAS

Ejemplo de longitud de palabras.

Nivel A: *¿De qué largo son las palabras en esta página?*

Nivel B: *¿Son las palabras de un capítulo de un texto de quinto básico diferentes de las de un texto de tercero básico?*

Nivel C: *¿Usan los textos de quinto básico palabras más largas que uno de tercero básico?*

Ejemplo de Música Popular

Nivel A: *¿Qué tipo de música es más popular entre los estudiantes de nuestro curso?*

Nivel B: *¿Cómo se comparan los tipos de música favorita entre cursos diferentes?*

Nivel C: *¿Qué tipo de música es más popular entre los alumnos de nuestra escuela?*

Ejemplo de la estatura y la longitud entre los brazos

Nivel A: *En nuestro curso, ¿son las estaturas y la longitud entre los brazos aproximadamente iguales?*

Nivel B: *¿Es la relación entre la longitud entre los brazos y la estatura la misma que la existente en otro curso?*

Nivel C: *¿Es la altura un predictor útil de la longitud entre los brazos para los alumnos de nuestra escuela?*

Ejemplo de crecimiento de plantas

Nivel A: *¿Crece una planta colocada junto a la ventana más que otra colocada lejos de ella?*

Nivel B: *¿Crecerán cinco plantas situadas junto a la ventana más que cinco plantas situadas lejos de ella?*

Nivel C: *¿Cómo afecta el nivel de luz solar al crecimiento de las plantas?*

II. RECOPIRAR LOS DATOS**Ejemplo de longitud de palabras**

Nivel A: *¿Cuán largas son las palabras en esta página?*

Se determina la longitud de cada palabra y se anota.

Nivel B: *¿Son las palabras de un capítulo de un texto de 5º Básico más largas que las de un capítulo de 3º Básico?*

Se usa una muestra aleatoria simple de las palabras de cada capítulo.

Nivel C: *¿Usan los textos de 5º Básico palabras más largas que los de 3º Básico?*

Se consideran y comparan diferentes diseños de muestreo y se utilizan uno o más de ellos. Por ejemplo, en lugar de seleccionar una muestra aleatoria simple de las palabras, se puede realizar una muestra al azar de las páginas del texto y se usan todas las palabras en las páginas seleccionadas para conformar la muestra.

Problema de medición: Por ejemplo, la longitud de la palabra depende de la definición de "palabra". ¿Es un número una palabra? La consistencia de la definición ayuda a reducir la variabilidad de las medidas.

Ejemplo del crecimiento de plantas

Nivel A: *Una planta colocada junto a la ventana ¿crece más alto que una colocada lejos de ella?*

Un brote se planta en una maceta que se coloca junto a una ventana. Otro brote del mismo tipo y tamaño se planta en una maceta lejos de una ventana. Después de seis semanas, el cambio en la altura de cada uno se mide y se anota.

Nivel B: *¿Crecedrán 5 plantas de cierto tipo cerca de una ventana más alto que otras 5 situadas lejos de ella?*

Cinco plantas del mismo tipo y tamaño se plantan en una maceta colocada junto a una ventana. Otras cinco del mismo tipo y tamaño se plantan en una maceta alejada de la ventana. Se usan números aleatorios para decidir qué plantas van en la ventana. Después de seis semanas se mide y anota el cambio de altura de cada planta.

Nivel C: *¿Cómo afecta el nivel de luz solar al crecimiento de las plantas?*

Se seleccionan 15 plantas del mismo tipo y tamaño seleccionado y se plantan 5 en cada una de 3 macetas. Se seleccionan 15 plantas de otra variedad para determinar si el efecto de la luz solar es el mismo en las diferentes variedades. Cinco de cada una se plantan en cada una de las 3 macetas, las cuales se ubican en lugares con niveles diferentes de luz solar. Se utilizan números aleatorios para decidir qué plantas van en cual maceta. Después de 6 semanas, se mide el cambio en la altura de cada planta y se lo anota.

Problemas de medición: El método de medir el cambio en la altura debe ser claramente entendido y aplicado con el fin de reducir la variabilidad de las mediciones.

III. ANALIZAR LOS DATOS

Ejemplo de Música Popular

Nivel A: *¿Qué tipo de música es más popular entre los estudiantes en nuestro curso?*

Se utiliza un gráfico de barras para mostrar el número de estudiantes que elige cada categoría de música.

Nivel B: *¿Cómo se compara el tipo de música favorita entre diferentes cursos?*

Para cada clase se usa un gráfico de barras para mostrar el porcentaje de los estudiantes que optan por cada categoría de música. Se usa la misma escala para facilitar la comparación de los gráficos.

Nivel C: *¿Qué tipo de música es más popular entre los alumnos de nuestra escuela?*

Se usa un gráfico de barras para mostrar el porcentaje de alumnos que elige cada categoría de música. Debido a que se usa una muestra aleatoria, se calcula una estimación del margen de error.

Problema de medición: Si se utiliza un cuestionario para recopilar las preferencias musicales de los estudiantes, el diseño y la redacción del cuestionario deben ser cuidadosamente examinados con el fin de evitar posibles sesgos en las respuestas. La elección de las categorías de música también puede afectar los resultados.

Ejemplo de la altura y la longitud entre los brazos

Nivel A: *En nuestro curso, ¿son las estaturas y la longitud entre los brazos aproximadamente iguales?*

La diferencia entre la altura y la longitud entre los brazos se determina para cada individuo. Se construye un dispersiograma con

X= estatura e Y = longitud entre los brazos. Se dibuja la línea $X=Y$ sobre el gráfico.

Nivel B: *¿Es la relación entre la longitud entre los brazos y la estatura la misma que la existente en otro curso?*

Para cada curso se construye un gráfico XY con X=altura e Y= longitud entre los brazos. Se traza una línea "a ojo" en cada gráfico para describir la relación entre estas variables. Se determina la ecuación de esta línea y se calcula una medida elemental de asociación.

Nivel C: *¿Es la altura un predictor útil de la longitud entre los brazos para los alumnos de nuestra escuela?*

Se determina y evalúa la recta de mínimos cuadrados de regresión para usarlo como un modelo de predicción.

Problema de medición: Los métodos utilizados para medir la altura y longitud entre los brazos deben estar claramente comprendidos y aplicados con el fin de reducir la variabilidad de medición. Por ejemplo, ¿Se mide la estatura con o sin zapatos?

IV. INTERPRETAR LOS RESULTADOS

Ejemplo de longitud de palabras.

Nivel A: ¿Cuán largas son las palabras en esta página?

Se examina y resume el gráfico de puntos generado por todas las longitudes de las palabras. En particular, los estudiantes detectan la más larga, la más corta, la más común y la menos común. Así como las longitudes en el centro.

Nivel B: ¿Son las palabras de un capítulo de un texto de 5º Básico más largas que las de un capítulo de un texto de 3º Básico?

Los alumnos interpretan una comparación de la distribución de las longitudes de las palabras en el texto de 5º Básico con la correspondiente distribución en 3º Básico. Para ello utilizan un diagrama de caja para representar a cada una de estas distribuciones. Los estudiantes también reconocen que se han

utilizado muestras, de modo que ellas pueden o no ser representativas de capítulos completos.

Se ubica el diagrama de caja para la muestra de longitudes de 5º Básico al lado del diagrama de caja para la muestra de 3º Básico.

Nivel C: ¿Utilizan los textos de 5º Básico palabras más largas que las de los textos de 3º Básico?

La interpretación en el nivel C incluye la interpretación en el nivel B, pero además debe tener en cuenta la generalización de los textos incluidos en el estudio a una población mayor de textos.

Ejemplo del crecimiento de plantas.

Nivel A: *¿Crece una planta colocada junto a la ventana más que otra colocada lejos de ella?*

En este experimento simple, la interpretación es sólo una comparación de una medida del cambio de tamaño de una planta con el de otra.

Nivel B: *¿Crecen 5 plantas situadas junto a la ventana más que 5 plantas situadas lejos de ella?*

En este experimento, el estudiante debe interpretar una comparación de un grupo de 5 mediciones con las de otro grupo. Si se detectan diferencias, el estudiante debe reconocer que es probable que esto sea causado por la diferencia entre las condiciones de luminosidad.

Nivel C: *¿Cómo afecta el nivel de luz solar el crecimiento de las plantas?*

Existen varias comparaciones entre los grupos con este diseño. Si se detecta una diferencia, el estudiante debiera reconocer que es probable que ello sea causado por la diferencia de condiciones de luz o por la diferencia en los tipos de plantas. También se reconoce que la asignación al azar utilizada en el experimento puede generar diferencias en los resultados observados.

V. LA NATURALEZA DE LA VARIABILIDAD

El enfoque sobre la variabilidad se hace cada vez más sofisticado a medida que se progresa entre niveles de desarrollo.

Variabilidad dentro de un grupo: Es la única considerada en el nivel A. En el ejemplo de la longitud de las palabras, se analizan las diferencias entre las longitudes de palabra dentro de un grupo. En el ejemplo de la música popular, se consideran diferencias en el número de estudiantes que eligen cada categoría de música, lo que representa la *variabilidad dentro de un grupo de frecuencias*.

Variabilidad dentro de un grupo y la variabilidad entre grupos: En el Nivel B, los estudiantes empiezan a hacer comparaciones de grupos de mediciones. En el ejemplo de las longitudes de las palabras, se compara un grupo de palabras de un texto de 5º Básico con uno de 3º Básico. Tal comparación no sólo señala cuanto varían las longitudes de palabra diferentes dentro de cada grupo, sino también pueden compararse medidas de resumen como la media y la mediana.

Covariabilidad: En el Nivel B, los estudiantes también empiezan a investigar las "relaciones estadísticas entre dos variables. La naturaleza de esta relación estadística se describe en términos de cómo las dos variables "co-varían." En el ejemplo de las estaturas, si las de dos estudiantes difieren en dos centímetros, entonces nos gustaría que nuestro modelo de la relación nos diga por cuánto podemos esperar que difiera la longitud entre los brazos.

La variabilidad en el ajuste del modelo: En el Nivel C, los estudiantes evalúan qué tan bien una regresión lineal predecirá los valores de una variable a partir de los valores de otra variable, utilizando los gráficos de residuos. En el ejemplo de la estatura, por ejemplo, esta evaluación se basa en examinar si las diferencias entre las longitudes entre brazos reales y las previstas por el modelo varían al azar en torno a la línea horizontal que representa la "ausencia de diferencias sistemáticas". La inferencia acerca de un valor predicho de y para un valor dado de x es válida sólo si los valores de y varían de forma aleatoria de acuerdo a una distribución normal centrada en la línea de regresión. Los estudiantes en el Nivel C aprenden a estimar esta variabilidad utilizando la desviación estándar estimada de los residuos.

La variabilidad inducida: En el ejemplo de crecimiento de las plantas en el nivel B, el experimento está diseñado para determinar si habrá una diferencia entre el crecimiento de las plantas en la luz solar y de las plantas lejos de ésta. Queremos determinar si la diferencia impuesta por las distintas condiciones ambientales induce una diferencia en el crecimiento.

La variabilidad de muestreo: Cuando se usa una selección aleatoria, las diferencias entre dos muestras son atribuibles al azar. La comprensión de esta variabilidad aleatoria es lo que produce los resultados de predictibilidad. En el ejemplo de las preferencias musicales, en el Nivel C esta variabilidad no sólo es considerada, sino que es la base para entender el concepto de margen de error.

Variabilidad aleatoria asociada con la asignación de grupos experimentales: En el ejemplo de crecimiento de las plantas en el Nivel C, las plantas son asignadas al azar a cada grupo. Los estudiantes consideran cómo esta variación al azar en la asignación puede producir diferencias en los resultados, aunque no se haga un análisis formal.

BIBLIOGRAFÍA

- Aliaga, M. and Gunderson, B. (2005). *Interactive Statistics* (3rd Edition). Prentice Hall.
- Anales de la UCH. (1955). Sobre la enseñanza de la Estadística. *Anales De La Universidad De Chile*, Vol. 97-98. Consultado en agosto, 2011, en <http://www.comunicacionymedios.uchile.cl/index.php/ANUC/article/viewPDFInterstitial/11028/11282>
- Araujo, C. (2011a). ¿Qué es Estadística? Coexistencia de muy diferentes visiones sobre el significado de la Estadística. Consultado en agosto, 2011 en <http://www.mat.puc.cl/archivos/File/SOBRE.DOCENCIA/A02%20La%20Coexistencia%20de%20Diferentes%20Definiciones%20de%20Estadistica.pdf>
- Araujo, C. (2011b). Una propuesta de caracterización completa y única sobre la Estadística. Consultado en agosto, 2011 <http://www.mat.puc.cl/archivos/File/SOBRE.DOCENCIA/A03.pdf>
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números* 76, 55-67.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics* (to appear).
- Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12.
- Bases Curriculares (2011). Bases Curriculares, Consulta Pública, Educación Básica, abril 2011. Unidad de Curriculum y Evaluación, MINEDUC, Chile. Consultado en julio, 2011 en <http://www.comunidadescolar.cl/documentacion/BASESCURRICULARESCONSULTA.PDF>
- Biehler, R. (1986). Exploratory data analysis and the secondary stochastic curriculum. Consultado en mayo 2009 desde <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots2/Biehler.pdf>
- Burgess, T. (2007). *Investigating The Nature of Teacher Knowledge Needed and used in Teaching Statistics*. Disertación doctoral no publicada. Massey University Palmerston North, New Zealand.
- Cobo, B. (2003). Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria. Disertación doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.

- College Board (2006). College Board Standards for College Success™: Mathematics and Statistics.
- College Entrance Examination Board (2004). Course Description: Statistics. New York: College Board.
- Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). The Mathematical Education of Teachers. Providence, RI, and Washington, DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.
- Estrella, S. (2009). Panorama actual de las investigaciones internacionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. Ponencia en las XXXVI Jornadas Nacionales de Estadística, Universidad de la Frontera, Temuco.
- Estrella, S. (2010). "Instrumento para la evaluación del Conocimiento Pedagógico del Contenido de Estadística en profesores de Educación Básica", tesis de Magister no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Ferreiro, O. y Fernández de la Reguera, P. (1988). "La estadística, una ciencia en la controversia". *Revista Universitaria* 25, 13-17, Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D.S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., Scheaffer, R. (2005). A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education. GAISE Report. American Statistical Association. Recuperado desde <http://www.amstat.org/education/gaise>
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in Schools: Challenges for Teaching and Learning*, pp- 39-63. Springer, New York.
- Garfield, J.B. y Everson, M., (2009). Preparing teachers of statistics: a graduate course for future teachers. *Journal of Statistics Education*.
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review*. 75 (3), 372-396.
- Kvatinsky, T. y Even, R., (2002). Framework for teacher knowledge and understanding of probability. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Mathematics Primary Syllabus (2007). Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education, Singapore. Consultado en julio, 2011 en <http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-primary-2007.pdf>
- MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de Diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria.
- MINEDUC (2009). Propuesta Ajuste Curricular. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Matemática. Junio, 2009. Ministerio de Educación. Chile.
- Moore, D. y Cobb, G. (1997). "Mathematics, Statistics, and Teaching," *American Mathematical Monthly*, 104, pp. 801–823.
- MT21. (2007). Mathematic Teaching in the 2st Century, The Preparation Gap: Teacher Education for Middle School Mathematics in Six Countries. Michigan University.
- National Assessment Governing Board (2004). Mathematics Framework for 2005. National Assessment of Educational Progress. Recuperado desde www.amstat.org/education/gaise/4.
- National Curriculum (1999). The National Curriculum for England, Mathematics. Versión online en www.nc.uk.net.
- NAEP (2005). National Assessment of Educational Progress. (2005). The nation's report card. Washington, DC: U.S. Department of Education, Institute of Education Sciences, National Center for Education Statistics.
- NCTM (1989). National Council of Teachers of Mathematics Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Council.
- NCTM (2002–2004). National Council of Teachers of Mathematics. Navigating through Data Analysis and Probability Series. Reston, VA: The Council.
- NCTM (2000). National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Council.
- OECD. (2010). Síntesis Estudio Económico de Chile, 2010. Consultado en marzo, 2010 en <http://www.oecd.org/dataoecd/7/38/44493040.pdf>
- Ortiz, J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huesca: España.

- Ottaviani, M. (1995). *Induzioni: The Italian Journal On Teaching Statistics*, Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate Università di Roma La Sapienza, Italia. Proceedings of 5th International Conference on Teaching Statistics, Singapore.
- Parzysz, B. (2003). *L'Enseignement de la statistique et des probabilités en France: Évolution au cours d'une carrière d'enseignant période 1965-2002* Teaching of statistics and probability in France. Evolution along a teacher's professional work period 1965-2002. In B. Chaput Coord, *Probabilités au Lycée*. Commission Inter-Irem Statistique et Probabilités, Paris
- Sarmiento, D.F. (1856). *Educación Común*. Memoria presentada al Consejo Universitario de Chile. Imprenta del ferrocarril, Santiago.
- Scheaffer, R.L. (2006). *Statistics and mathematics: on making a happy marriage*. In G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and Reasoning with Data and Chance*, pp. 309–321. NCTM, Reston, VA.
- Steen, L. (2001). *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy*. National Council on Education and the Disciplines, Woodrow Wilson National Fellowship Foundation in Princeton, N.J.